似大地水准面与大地水准面的精密转换*

张赤军　边少锋

中国科学院测量与地球物理研究所动力大地测量实验室，武汉 430077

摘要　提供了似大地水准面转换与大地水准面的精密公式和实施方法，其中涉及扰动重力垂直梯度，转换后的大地水准面的精度与前者相近.

关键词　大地水准面　似大地水准面　二阶项逼近　扰动重力垂直梯度

1　二阶项逼近的意义与作用

似大地水准面可以严格推求，但它只有几何意义，而大地水准面，同时具有几何和物理意义，因此如何将前者转换成后者，这已引起测地界的重视. 1997 年 Rapp 指出[1]，在转换中二阶项的影响需待研究. 迄今为止，人们将似大地水准面转化成大地水准面，依然只顾及高程(H)的一次项，相应的表达式为[2]

$$N = \zeta + \frac{\Delta g_b}{\gamma_m} H, \tag{1}$$

式中，N 和 ζ 分别为大地水准面和似大地水准面起伏，Δg_b 为 Bouguer 异常，γ_m 为高程从 0 到 H 处的正常重力平均值. 该公式仅适用于平原地区，对于山区，以用包括高程二次项的改正为宜，相应的公式应为[3]

$$N = \zeta + \frac{\Delta g_b}{\gamma_m} H - \frac{1}{2\gamma_m} \frac{\partial \delta g}{\partial H} H^2, \tag{2}$$

式中$\partial \delta g / \partial H$ 为扰动重力垂直梯度数值.

在山脊扰动重力梯度较大，一般可达到 500E 左右，则对于海拔为 4000 m 的高山或高原，二阶项的影响可达 40 cm 左右，对于更高的海拔处，该值还会更大.

顾及扰动重力垂直梯度的意义在于该项反映了地球重力场的局部地形效应[4]，只有一并考虑一次项中区域场和二次项中的局部场的贡献，这时由似大地水准面转化成大地水准面才比较全面和精确.

2　顾及高程二次项公式的推导简介

由文献[3]可知，在正高及正常高定义的基础上，取地面上的重力梯度是正常重力梯度与扰动重力梯度之和，而在处理地面以下的重力梯度时需顾及 $4\pi G\rho$ 的密度突变，G 为引力常

2000-03-06 收稿，2000-04-24 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目（批准号：49674208）

数,ρ 为地壳密度. 如此,再从地表到大地水准面取积分,以求此间的重力平均值,经化算,即可求出以下 $\zeta - N$ 的表达式(2),且正高(H_0)与正常高(H_n)有如下关系

$$H_0 = H_n + \zeta - N, \tag{3}$$

式中 H 以 km 为单位,因此,即使正高和正常高相差几米于计算精度无妨.

顺便指出,公式(2)与 Sjoberg 导出的公式[5](式中 Δg 为空间重力异常)

$$N - \zeta = \frac{\Delta g_b}{\gamma_m}H - \frac{1}{2\gamma_m}\frac{\partial \Delta g}{\partial H}H^2 \tag{4}$$

稍有不同,在平面近似的情况下,扰动重力与空间重力异常相等,不过从理论上分析,两者互差很小,完全可以忽略,但需指出,(2)式的推导比(4)式的推导更为简便,后者是以球函数等方法推导出的,如此推导比较复杂冗长,且 H^2 前的系数为空间重力异常垂直梯度.

3 垂直梯度的推求

(1)用地面重力异常求扰动重力垂直梯度,由文献[6]可知,扰动重力垂直梯度的严格公式为

$$\frac{\partial^2 T_p}{\partial r^2} = \frac{4\Delta g_p}{R_e} + \frac{6\gamma N_p}{R_e^2} - \frac{R_e^2}{2\pi}\int_\theta \frac{1}{l^3}(\Delta g - \Delta g_p)\mathrm{d}\sigma, \tag{5}$$

式中扰动位 $T_p = T(r, \varphi, \lambda)$, r, λ, φ 分别为 p 点向径、经度和纬度,Δg 与 Δg_p 为单位球上面元 $\mathrm{d}\sigma$ 处和 p 点的空间重力异常,N_p 为 p 点的大地水准面起伏,R_e 为地球平均半径,l 为 p 点与面元 $\mathrm{d}\sigma$ 之间的距离.

即使用地面上很大的 Δg_p(400×10^{-5} ms^{-2})与 N_p(100 m)代入上式,右端的第一项、二项效应也不会超过 $4E$,它们与以下山区值相比很小. 珠穆朗玛峰为 1139 E[7],佘山为 874 E[8]和德国山区为 1400 E[9],显然(5)式右端前两项可略去,这时

$$\frac{\partial^2 T_p}{\partial r^2} = -\frac{R^2}{2\pi}\int_\sigma \frac{1}{l^3}(\Delta g - \Delta g_p)\mathrm{d}\sigma = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{1}{l^3}(\Delta g - \Delta g_p)\mathrm{d}s, \tag{6}$$

式中 $\mathrm{d}s = R^2\mathrm{d}\sigma$,(6)式即为扰动重力的实用公式,由上述分析可知,它与(5)式相差无几. 在用重力异常推求扰动重力垂直梯度时,要求在计算点附近有很密的重力数据,其分辨率达 10 m 左右,以用 1:50000 乃至 1:10000 的重力异常图为宜.

(2) 按球函数展开法进行计算. 用重力场模型表示扰动位及扰动重力的垂直梯度的表达式和计算虽然比较简单,但到目前为止,由于它们的分辨率所限,即使用 IGG-97 的 720 的阶[10]和 Wenzel 的 1800 阶[11]模型,也不能符合要求.

(3) 用地形数据推求. 这适宜于缺乏重力资料或难以用仪器观测的情况,一般空间重力异常可表示为

$$\Delta g = a + 2\pi G\rho bH, \tag{7}$$

式中 a 可理解为缓慢变化的 Bouguer 异常,在局部范围内可视为常数. H 为地形高,b 为空间重力异常与高程的相关系数,一般可达 0.9 或更大. 现近似取 $b \approx 1$, 因此将(7)式代入(6)式有

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \approx -G\rho\iint \frac{H - H_p}{l^3}\mathrm{d}s. \tag{8}$$

假定地形密度为常数，故地形起伏对 p 点重力垂直梯度的影响可由下列积分确定[12]（此处 r 与 z 方向相反）

$$\frac{\partial^2 r}{\partial r^2} = \frac{\partial \delta g}{\partial H} = G\rho \iint \int_0^{\Delta h} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{9}$$

式中 $\Delta H = H - H_p$ 为地形相对于 p 点的高差，完成 z 方向积分后可得[13]

$$\frac{\partial \delta g}{\partial h} = - G\rho \iint \frac{\Delta h}{(x^2 + y^2 + \Delta h^2)^{3/2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{10}$$

可以看出(10)式的线性近似即为(8)式，当进一步展开时就包含了高次项，这说明(9)式精度是比较高的.

(4)直接测量. 该法是利用高精度相对重力仪在测站(p)的垂线方向的上下两点作重力测量，由此可以算出梯度，详见文献[12].

(5)其他方法. 利用计算点附近的垂线偏差，然后根据 Laplace 方程求出扰动重力垂直梯度. 还可用 Hilbert 变换，但这需要详细的重力异常图.

比较以上方法，以第 3 或 4 方法为合适，在陡峻的高山，以第 3 方法为宜. 在具有 1:5 万地形图时，如在待求点附近加测一些高程点，则可得较佳的结果.

4 试验与误差估计

根据上节中的第 3, 4 方法，对以下几点扰动重力垂直梯度进行了试算比较.

在佘山绝对重力点上，由几台 LCR 仪器观测得到的扰动重力梯度为 - 874 E，由地形及岩石样本，按圆柱形公式计算[14—15]，得扰动重力梯度为 - 924 E. 在神农顶由 LCR-G 仪器进行观测，得到的扰动重力梯度为 - 510 E，根据 1:5 万地形图及岩石标本计算得到的为 - 543 E. 在野猫山实测的扰动重力垂直梯度为 - 392 E，计算得到的为 - 413 E. 从以上 3 点的试验可知，计算和实测的结果相差不大，最大为 50 E. 我们曾用同样方法对珠穆朗玛峰进行了计算，该值为 - 1139 E. 由于至今不能用仪器直接观测扰动重力垂直梯度，故无法进行比较. 将这一结果与文献[16]的正常高以及我们推估的珠穆朗玛峰重力值相结合[17]，最后求出大地水准面高为 - 30.10 m，正高为(8847.82 ± 0.29) m，这与文献[16]的结果甚为接近.

根据(2)式可以计算出神农顶、野猫山和珠穆朗玛峰的二次项改正，它们分别为 0.26，0.13 和 4.46 m，这些值特别是后者是相当大的，因此在当今强调精化大地水准面的同时，必须顾及由似大地水准面转换到大地水准面的二次项改正.

同样我们还可以根据(2)式推得大地水准面的误差，其公式可见文献[18]. 若用 Bouguer 异常的误差为 $\pm 5 \times 10^{-5}\ \mathrm{ms}^{-2}$，扰动重力梯度误差为 ± 50 E，代入该式，它们的贡献要比似大地水准面(高程异常)的误差小得多. 因此，在山区推求大地水准面的误差主要来源于似大地水准面，而后者又受制于分辨不高的重力异常. 而从(4)式可得，$m_{H_0} = [m^2_{H_0} + m^2_{(\zeta - N)}]^{1/2}$，由于 $m_{(\zeta - N)}$ 的误差仅有 1 ~ 2 cm，故可看出，正高的误差取决于正常高的误差，只要正常高达到厘米级精度，正高也有可能达到.

参　考　文　献

1　Rapp R H. Use of potential coefficient models for geoid undulation determinations using a spherical harmonic representation of the height

anomaly / geoid undulation difference. Toural of Geodesy, 1997, 71(5), 274
2 Heiskanen W A, et al. Physical Geodesy. San Fransisco: Freeman and Company. 1967
3 边少锋,等. 论大地水准面与似大地水准面的差距. 见:庆祝陈永令院士九十寿辰论文集. 北京:测绘出版社,1999
4 张赤军. 用地形数据确定重力异常垂直梯度. 科学通报, 1999, 44(6): 656
5 Sjeberg L E. On the quasigeoid to geoid separation. Manuscripta Geodatica. 1995, 20: 182
6 宁津生,等. 由地面重力数据确定扰动位径向二阶梯度. 武汉测绘科技大学学报,1996, 21(3): 201
7 张赤军. 珠穆朗玛峰大地水准面与高程的测定. 科学通报, 1997, 42(23): 2543
8 张赤军. 佘山重力垂直梯度偏大原因及其在大地测量上的影响. 地壳形变与地震, 1998, 18(2): 68
9 Torge W. Gravimetry, Trieste: Walter de Gruyter, 1989, 197
10 Yang Lu, et al. The regional geopotential model to degree and order 720 in China, Geodesy Beyond 2000, Schwarz K P, ed. Berlin: Springer Verlag, 2000, 143 ~ 148
11 Wenzel G. Ultra hochauflosende Kugel funktionsmodelle GPM98A und GPM98B des Erdeschwerefeldes. Progress in Geodetic Science at GW98, Willi Freeden, ed. Aachen: Shaker Verlag, 1998, 323 ~ 331
12 王谦身,等. 微重力测量——理论、方法与应用. 北京:科学出版社, 1995
13 边少锋, 等. 地表起伏对重力垂直梯度影响的精密计算. 物探与化学计算, 1999, 21(2): 133
14 Elkins T A. Vertical gradient of gravity on axis for hollow and solid cylinders. Geophysics, 1996, 31(4): 816
15 张赤军. 几种规则形体的引力垂向导数及其应用. 地壳形变与地震,1999, 19(2): 32
16 陈俊勇,等. 珠穆朗玛高程的一次新测定. 测绘通报, 1993, (6): 3
17 张赤军,等. 珠穆朗玛峰重力值的推估. 地壳形变与地震, 1999, 19(1): 20
18 张赤军. 精确测定神农顶的大地水准面与正高. 武汉测绘科学大学学报, 1999, 24(增): 18